

Дәріс 4

Фурье қатары және интегралы қасиеттері

Ортонормаланған базистік функция

Суретте $L_2(T)$ кеңістігінде квадраттық интегралданатын $x(t)$ үздіксіз функциясын кез келген ортонормаланған базистік функциялар жүйесі $\{\psi_j(t)\}$ арқылы көрсету формуласы берілген.

Формула мынадай:

$$\int_{-T}^T \psi_j(t) \psi_i(t) dt = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i. \end{cases}$$

Бұл ортонормаланған базистің қасиеті, оны $x(t)$ функциясын жіктеу үшін қолданады.

Ортонормаланған базистік функциялардың қарапайым мысалы ретінде **Фурье қатарын** алайық.

Фурье базисі:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right), \quad \psi_{-n}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

мұндағы $n = 1, 2, 3, \dots$

Бұл функциялар **ортонормаланған**, яғни:

$$\int_{-T}^T \psi_m(t) \psi_n(t) dt = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Бұл қасиет Фурье қатары арқылы кез келген $x(t)$ функциясын жіктеуге мүмкіндік береді:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n(t),$$

мұндағы **Фурье коэффициенттері**:

$$c_n = \int_{-T}^T x(t) \psi_n(t) dt.$$

Фурье қатарының базисі

$$\text{Базис } \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, k = -\infty, \infty \right\}$$

$L_2(T)$ Кеңістігі үшін толық болады

$$x(t) \in L_2(T) \longrightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

Фурье қатары, оның формалары, спектрлердің қасиеттері

$$x(t) \in L_2(T) \longrightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

Парсеваль теңдігі

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

Фурье қатары — периодты сигналды немесе функцияны синусоидалар мен косинусоидалар жиынтығы түрінде бейнелеу әдісі. Бұл әдіс күрделі сигналдарды қарапайым гармоникалық тербелістерге жіктеуге мүмкіндік береді.

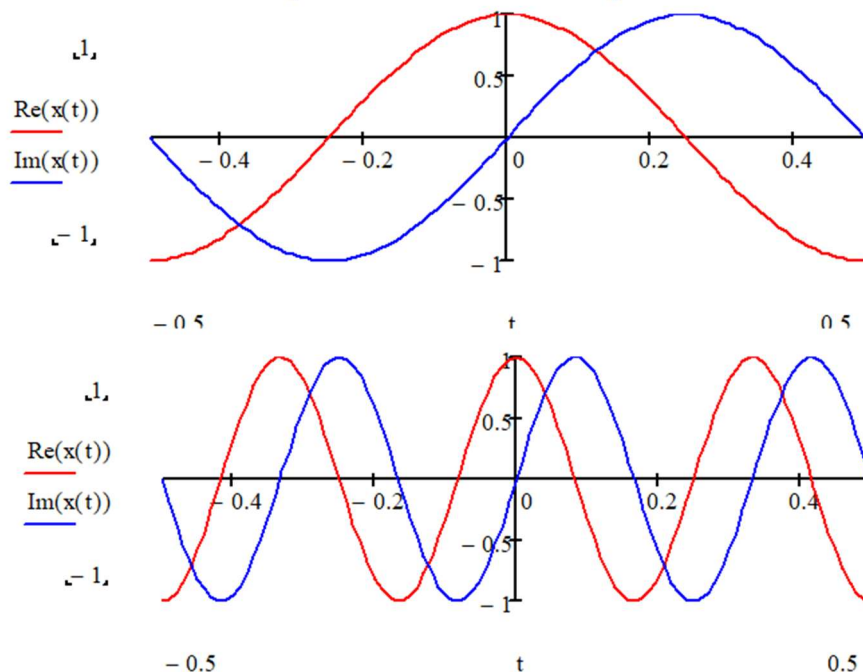
Спектр — сигналдың жиіліктік құрамын сипаттайды. Спектрде әрбір гармониканың амплитудасы мен жиілігі көрінеді.

спектрдің түрлері:

- Амплитудалық спектр: жиілікке байланысты амплитудаларды көрсетеді.
- Фазалық спектр: жиілікке байланысты фазаларды көрсетеді.

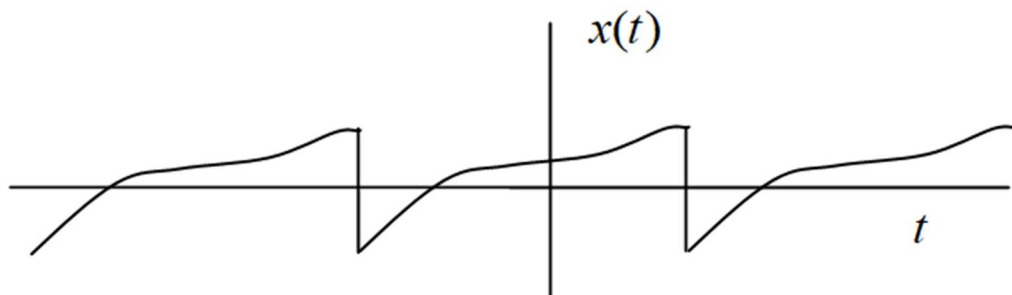
- Энергетикалық спектр: жиілікке байланысты қуат немесе энергияны көрсетеді.

Базистік функциялар $\left\{ e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, k = \overline{-\infty, \infty} \right\}$ егер $t \in (-T/2, T/2)$



Базистік функциялар $\left\{ e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, k = \overline{-\infty, \infty} \right\}$ $t \in (-\infty, \infty)$ кезінде периоды

T олардың кезеңдерінің ең кіші ортақ еселігі болып табылады



Фурье қатары шекті аралықтағы сигналды және оның бүкіл ось бойынша периоды жалғасын көрсетеді. $t \in (-\infty, \infty)$

Бұл жағдайда спектрлік коэффициенттер бірдей формулалар арқылы табылады!

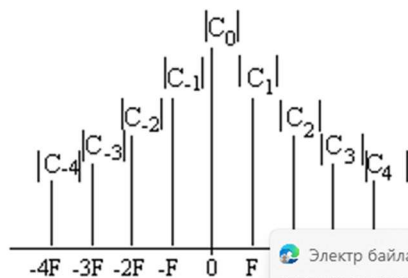
Комплексті Фурье қатары

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

жалпы жағдайда комплексті

$$\{|C_k|, k = -\infty, \infty\}$$

Амплитудалық спектр



$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$$

$$C_k = |C_k| e^{j\varphi_k}$$

$$\{\varphi_k, k = -\infty, \infty\}$$

Фазалық спектр



Нақты сигнал

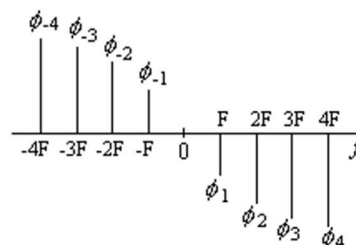
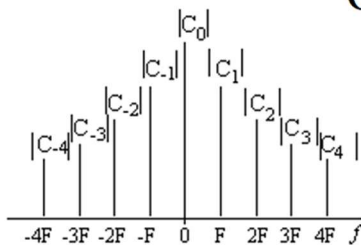


амплитудалық спектр жұп
фазалық спектр тақ

$$x^*(t) = x(t)$$

$$C_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt \right)^* = C_k^*$$

$$C_{-k} = C_k^*$$



– Фурье қатарының тригонометриялық түрі

Жұпты қосайық

$$\begin{aligned} C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + C_{-k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} &= C_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + C_k^* e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = \\ &= |C_k| e^{j\varphi_k} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} + |C_k| e^{-j\varphi_k} e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} = 2|C_k| \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right) \end{aligned}$$

Сонда Фурье қатарын тригонометриялық түрде жазуға болады

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + \varphi_k\right), \\ A_k &= \begin{cases} 2|C_k|, & k \neq 0, \\ A_k = |C_k| = C_0, & k = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Сондықтан Фурье қатарының тригонометриялық түрі мын түрде жазылады:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi}{T}kt + b_k \sin \frac{2\pi}{T}kt \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) dt, \quad k = \overline{0, \infty}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) dt, \quad k = \overline{1, \infty}$$

Екі функциялардың жұбын қосайық

$$\begin{aligned}
 a_k \cos \frac{2\pi}{T} kt + b_k \sin \frac{2\pi}{T} kt &= \\
 &= a_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} kt} + e^{-j\frac{2\pi}{T} kt}}{2} + b_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{T} kt} - e^{-j\frac{2\pi}{T} kt}}{2j} = \\
 &= \frac{a_k - jb_k}{2} e^{j\frac{2\pi}{T} kt} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-j\frac{2\pi}{T} kt} \\
 &= C_k e^{j\frac{2\pi}{T} kt} + C_{-k} e^{-j\frac{2\pi}{T} kt}
 \end{aligned}$$

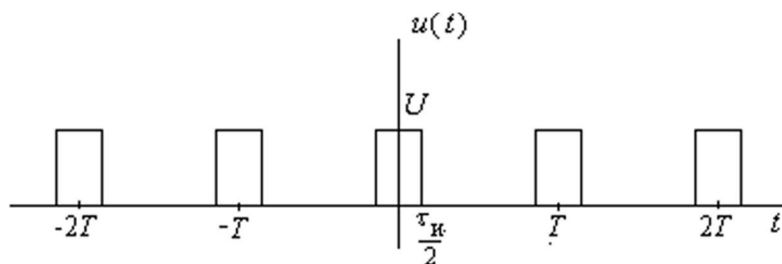
$$\frac{a_k - jb_k}{2} = C_k \qquad \frac{a_k + jb_k}{2} = C_{-k}$$

Осыдан мынадай байланыс шығады

$$\begin{aligned}
 |C_k| &= \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2} & C_0 &= \frac{a_0}{2} \\
 A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} & A_0 &= \frac{a_0}{2} & \varphi_k &= -\arctg \frac{b_k}{a_k}
 \end{aligned}$$

сигнал жұп - барлық синусоидалы компоненттер 0-ге тең;
сигнал тақ - барлық косинус компоненттері нөлге тең (бұл жағдайда тұрақты компонент те нөлге тең)

Мысалы.



Суретте тікбұрышты импульстер берілген

Оның сәйкесінше Фурье түрлендіруі

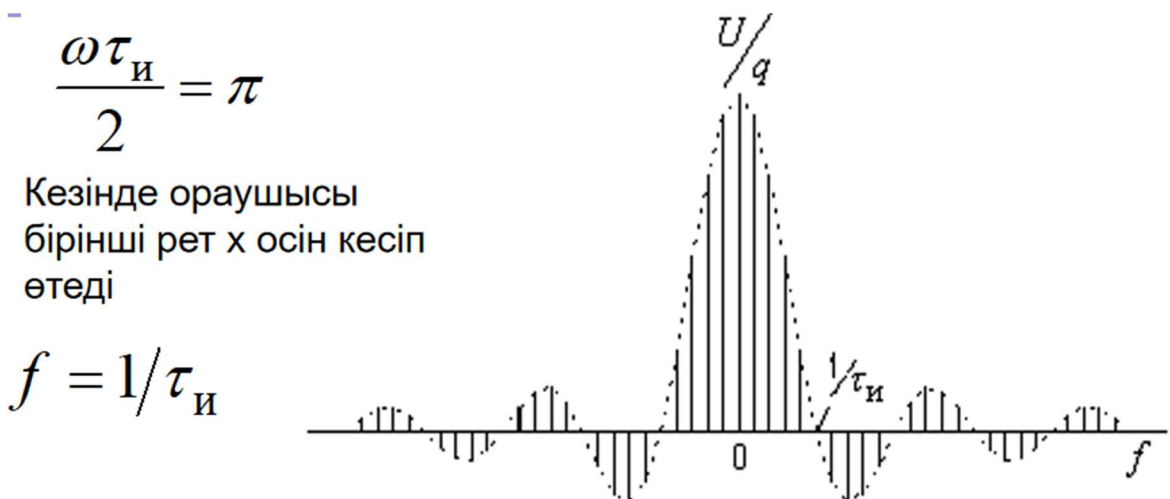
$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} U \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt = \frac{U\tau_n}{T} \frac{\sin \frac{k\Omega\tau_n}{2}}{\frac{k\Omega\tau_n}{2}}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F \quad \text{айналмалы импульс жиілігі}$$

$$F = 1/T \quad \text{циклдік импульс жиілігі}$$

$$C_0 = \frac{U\tau_n}{T} = U/q \quad q = T/\tau_n \quad \text{импульстік тізбектің қалыңдығы}$$

Сонда Фурье спектрінің көрінісі төмендегі суретте бейнелеген.



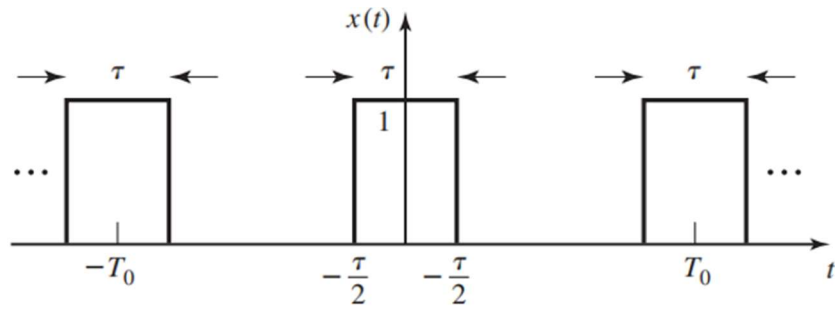
Дискреттер бір-бірінен арқылы $F = 1/T$
бөлінеді

Қалыңдығы
ның сандық
мәні



спектр жапырақшасының
негізгі бөлігінің жарты ені
жиілік осі бойынша спектрлік
компоненттердің қадамынан
неше есе үлкен екендігін
көрсетеді

Келесі түрдегі тібұрышты сигналдың өрнегі және Фурье түрлендіруі
келтірілген.

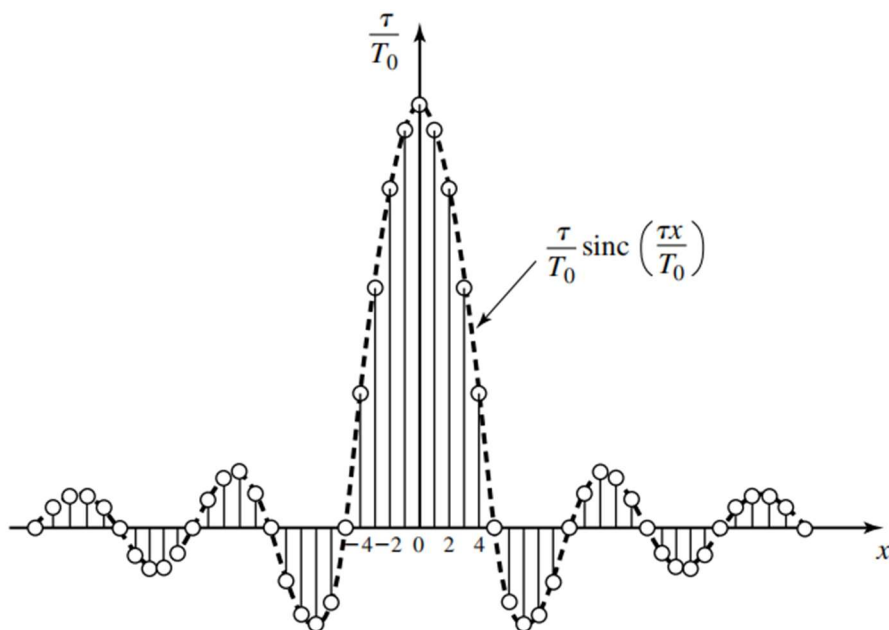


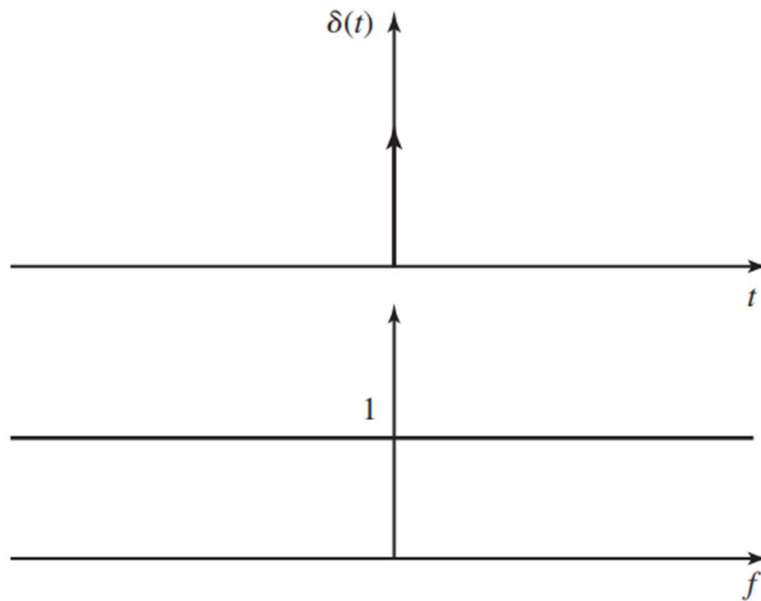
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t - nT_0}{\tau}\right) \quad \Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{басқа жағдайда} \end{cases}$$

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\frac{2\pi t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} 1 e^{-jn\frac{2\pi t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} \frac{T_0}{-jn2\pi} [e^{-jn\frac{\pi\tau}{T_0}} - e^{+jn\frac{\pi\tau}{T_0}}]$$

$$= \frac{\tau}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)$$

Импульстер қатарының спектрі



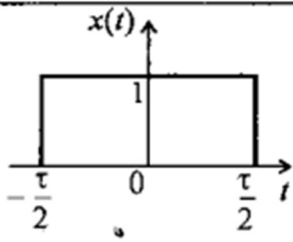
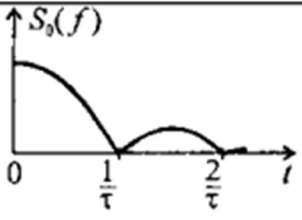
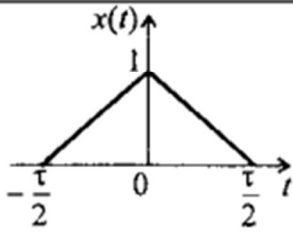
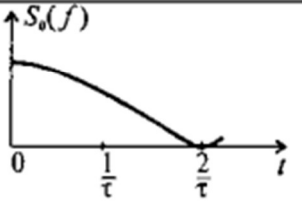
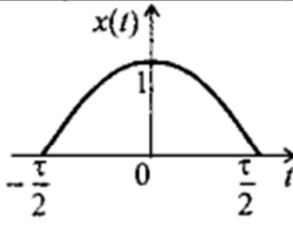
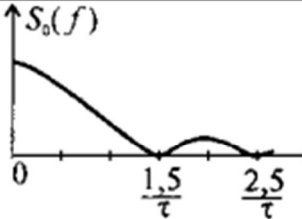
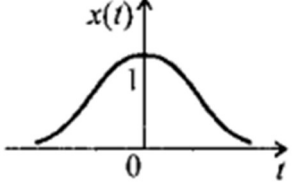
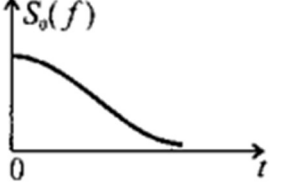


Дельта импульстың спектрі

Сигналдар және олардың спектрлері

$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$-\frac{1}{2j}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2j}\delta(f - f_0)$
$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & t < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & t = \pm \frac{1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\text{sinc}(f)$
$\text{sinc}(t)$	$\Pi(f)$
$\Lambda(t) = \begin{cases} t + 1, & -1 \leq t < 0 \\ -t + 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\text{sinc}^2(f)$
$\text{sinc}^2(t)$	$\Lambda(f)$

Төмендегі кестеде қосымша сигналдар және олардың Фурье түрлендірулері келтірілген

1	$x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\tau \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$	
2	$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2 t }{\tau}, & t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\frac{\tau}{2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)}{\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)^2}$	
3	$x(t) = \begin{cases} \cos\omega_0 t, & t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\frac{4\tau}{\pi} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$	
4	$x(t) = e^{-\beta^2 t^2}$		$\frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \cdot e^{-\left(\frac{\omega}{2\beta}\right)^2}$	

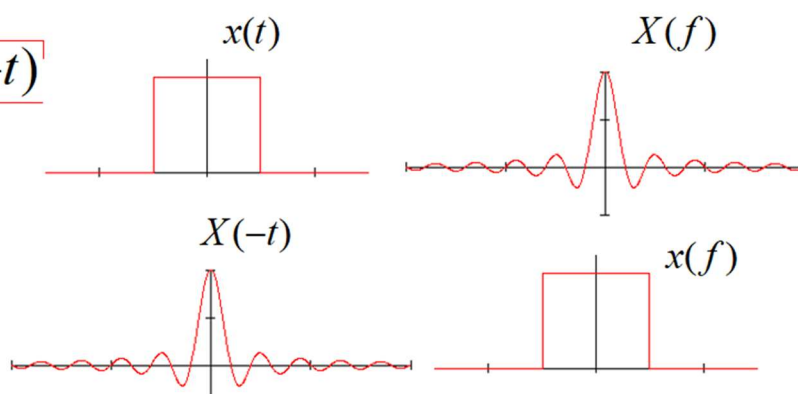
Фурье түрлендіруінің қасиеттері

1. СЫЗЫҚТЫҚ

$$\sum_k \alpha_k x_k(t) \Leftrightarrow \sum_k \alpha_k X_k(f)$$

2. Дуалдылық (уақыт-жиілік симметриясы)

$$x(f) \Leftrightarrow X(-t)$$



3. Ығысу (кешігу) теоремасы

$$x_{\tau}(t) = x(t - \tau)$$

$$\begin{aligned} X_{\tau}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f(\theta + \tau)} d\theta = \\ &= e^{-j2\pi f\tau} X(f) \end{aligned}$$

$$x(t - \tau) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f\tau} X(f)$$

4. Масштабтау теоремасы

$$x_m(t) = x(mt)$$

$$m > 0$$

$$\begin{aligned} X_m(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(mt) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f \frac{\theta}{m}} \frac{d\theta}{m} = \frac{1}{m} X\left(\frac{f}{m}\right) \end{aligned}$$

$$m = -\mu < 0$$

$$X_m(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\mu t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{\infty}^{-\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f \frac{\theta}{-\mu}} \frac{d\theta}{-\mu} =$$

$$x(mt) \Leftrightarrow \left| \frac{1}{m} \right| X\left(\frac{f}{m}\right) = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi \frac{f}{-\mu} \theta} d\theta = \frac{1}{\mu} X\left(\frac{f}{-\mu}\right)$$

5. Интегралдау теоремасы

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{X(0)\delta(f)}{2}$$

6. Дифференциалдау теоремасы $x_d(t) = dx(t)/dt$

$$X_d(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j2\pi f \cdot X(f)}$$

$x(t) \in L_2(-\infty, \infty)$

7. Модуляция теоремасы

$$e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt =$$

$$= X(f - f_0)$$

$$\boxed{x(t)e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f - f_0)}$$

8. Конволюция теоремасы

$$\boxed{x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f)Y(f)}$$

9. Көбейту теоремасы

$$x(t)y(t) \Leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)Y(f-\phi)d\phi = X(f) * Y(f)$$

10. Жорамалды бөлік теоремасы

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \quad \longrightarrow \quad x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft}dt =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t}dt \right)^* = X^*(-f)$$

11. Инверсия теоремасы $x_{-}(t) = x(-t)$

$$X_{-}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{\infty}^{-\infty} x(\theta)e^{j2\pi f\theta}(-d\theta) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)e^{-j2\pi(-f)\theta}d\theta = X(-f)$$

$$x(-t) \Leftrightarrow X(-f)$$

Сигнал нақты



$$X(f) = X^*(-f)$$

немесе



$$\begin{cases} |X(f)| = |X(-f)| \\ \arg X(f) = -\arg X(-f) \end{cases}$$

негізінде:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt \right)^* =$$

Жорамал бөлігі үшін де осындай:

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt \right)^*$$

$$x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-f)$$

Сигнал нақты



$$X(f) = X^*(-f)$$

немесе



$$\begin{cases} \operatorname{Re}\{X(f)\} = \operatorname{Re}\{X(-f)\} \\ \operatorname{Im}\{X(f)\} = -\operatorname{Im}\{X(-f)\} \end{cases}$$

Сигнал нақты жұп

$$x(t) = x(-t)$$



$$X(f) = X(-f)$$

$$\operatorname{Im}\{X(f)\} = 0$$



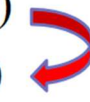
Сигнал нақты тақ

$$x(t) = -x(-t)$$



$$X(f) = -X(-f)$$

$$\operatorname{Re}\{X(f)\} = 0$$



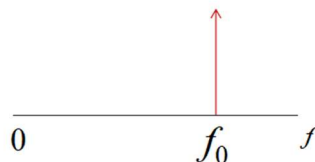
Гармоникалық сигналдардың спектрлік тығыздығы

$$e^{j2\pi f_0 t} \notin L_2(-\infty, \infty)$$



әдеттегі мағынада
спектрлік тығыздық жоқ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_0 t}$$



$$\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

Балансты-модулирленген тербеліс

$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{X(f + f_0)}{2} + \frac{X(f - f_0)}{2}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

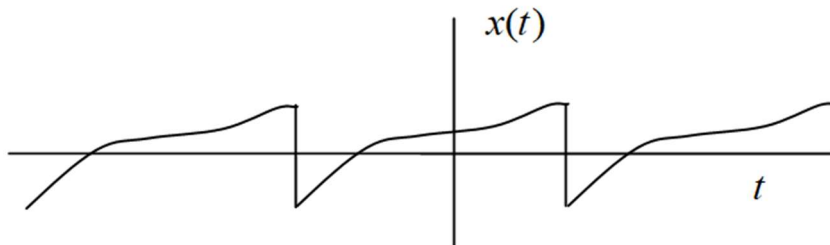
$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) \delta(f - f_0 - \varphi) d\varphi = X(f - f_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi) \delta(f + f_0 - \varphi) d\varphi = X(f + f_0)$$

Гармоникалық сигналдардың спектрлік тығыздығы

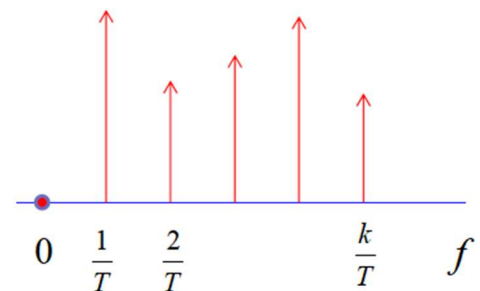
Периодты сигнал

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j \frac{2\pi}{T} k t}$$



Спектрлік тығыздық

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta\left(f - k \frac{2\pi}{T}\right)$$



Бақылау сұрақтары

1. Комплексті Фурье қатары туралы жазыңыз.
2. Импульстік тізбектің спектрлік тығыздығы.
3. Қатар мен Фурье түрлендіруінің арасындағы байланыс туралы жазыңыз.
4. Фурье түрлендіруінің сызықтық және дуалдылық қасиеттері туралы жазыңыз.
5. Фурье түрлендіруінің ығысу (кешігу) теоремасын жазыңыз.
6. Фурье түрлендіруінің масштабтау теоремасын жазыңыз.
7. Фурье түрлендіруінің интегралдау және дифференциалдау теоремасын жазыңыз.
8. Фурье түрлендіруінің модуляциялау теоремасын жазыңыз.
9. Фурье түрлендіруінің көбейту және конволюция теоремасын жазыңыз.
10. Фурье түрлендіруінің жорамалды бөлік және инверсия теоремасын жазыңыз.
11. Гармоникалық сигналдардың спектрлік тығыздығы туралы жазыңыз